3 Funções reais de variável real (Soluções)

1. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0,+\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2},+\infty[$. Para $x>0$ e $y\in\,]e^{-2},+\infty[$, temos

$$f(x)=y \Leftrightarrow e^{x^2-2}=y \Leftrightarrow x^2-2=\log y \Leftrightarrow x=\sqrt{\log y+2}.$$

   Logo, a inversa de f é

$$f^{-1}: \left]e^{-2},+\infty\right[\to \mathbb{R}^+, \quad f^{-1}(y)=\sqrt{\log y+2}.$$

   b) O contradomínio de sen restrito a $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ é $\operatorname{sen}\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\,]-1,1[$, logo o contradomínio de f é $]-2,2[$. Para $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $y\in\,]-2,2[$, temos

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x=y \Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}$$

   (note-se que $\frac{y}{2}\in]-1,1[$, que é o domínio de $\operatorname{arcsen} x$). Logo a inversa de f é

$$f^{-1}:]-2,2[\; \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \quad f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}\frac{y}{2}.$$

   c) $f^{-1}:]-1,1[\; \to \left]0,\frac{\pi}{2}\right[, \quad f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\arccos y$.

   d) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left]1-\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right[$, $f^{-1}(y)=1+\operatorname{arctg} y$.

2. Por definição, $\operatorname{arcsen}([-1,1])=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos([-1,1])=[0,\pi]$. Tem-se $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$, $\arccos 1=0$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{sen} x=a \Leftrightarrow x=\operatorname{arcsen} a+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $\operatorname{tg} x=a \Leftrightarrow x=\operatorname{arctg} a+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. a) Directamente da definição de arcos.

b) Directamente da definição de arcsen.

c) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, temos $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha \geq 0$, vem
$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

d) Idêntico a c).

e) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Queremos calcular $\operatorname{tg}\alpha$. De $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos
$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$
Logo,
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$
Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$, temos
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$, temos
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

f) Idêntico a e).

5. $f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é estritamente crescente. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos
$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$
Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

7. a) $]-2,2[$; b) $\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$; d) $]1,+\infty[$; e) $[0,1[$; f) $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$; g) $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$; h) $]-\infty,0]$; i) $[-1,\operatorname{sen}1[$.

8. Como arctg é uma função limitada, $\operatorname{arctg}(u_n)$ é uma sucessão limitada.

   Por outro lado, como arctg é uma função crescente, se (u_n) é uma sucessão monótona crescente (para decrescente é idêntico), $(\operatorname{arctg} u_n)$ será também crescente:

   $$u_{n+1}\geq u_n \Rightarrow \operatorname{arctg}(u_{n+1})\geq \operatorname{arctg}(u_n).$$

   Sendo monótona e limitada, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é convergente.

9. f é contínua em $a\in\mathbb{R}$ sse dado $\delta>0$, existe $\epsilon>0$ tal que

   $$|x-a|<\epsilon \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\delta.$$

   Para $f(x)=x^2+1$: dados $a\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$, temos

   $$|f(x)-f(a)|=|x^2+1-a^2-1|=|x^2-a^2|=|x+a||x-a|\leq(|x|+|a|)|x-a|.$$

   Se $x\in V_\epsilon(a)$ temos $|x-a|<\epsilon$ e também $|x|=|(x-a)+a|\leq|x-a|+|a|<\epsilon+|a|$. Logo, para $x\in V_\epsilon(a)$ tem-se

   $$|f(x)-f(a)|<(\epsilon+|a|+|a|)|x-a|<(2|a|+\epsilon)\epsilon.$$

   Agora para que $|f(x)-f(a)|<\delta$ é suficiente escolher $\epsilon>0$ tal que

   $$(2|a|+\epsilon)\epsilon<\delta \Leftrightarrow \epsilon^2+2|a|\epsilon-\delta<0.$$

   Como $\epsilon^2+2|a|\epsilon-\delta=0 \Leftrightarrow \epsilon=\frac{-2|a|\pm\sqrt{4|a|^2+4\delta}}{2}=-|a|\pm\sqrt{|a|^2+\delta}$, temos então que é suficiente tomar ϵ tal que

   $$0<\epsilon<-|a|+\sqrt{|a|^2+\delta},$$

   para obter que $|x-a|<\epsilon\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\delta$.

10. a) Como $\lim x_n=1$ e f é contínua em 1, temos $\lim f(x_n)=f(\lim x_n)=f(1)=1$.
    b) Da mesma forma, $\lim f(x_n)=f(1)=0$.
    c) Como $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, temos $\lim f(x_n)=\lim_{x_n\to1^+}f(x_n)=+\infty$.

11. Seja $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua (com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$), e (x_n) de termos em $[a,b]$ tal que $\lim\phi(x_n)=0$.

    Como (x_n) tem os termos em $[a,b]$, (x_n) é limitada e, do Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsucessão convergente que designamos por (x_{p_n}). Como $\lim\phi(x_n)=0$, e $(\phi(x_{p_n}))$ é uma subsucessão de $(\phi(x_n))$, temos $\lim\phi(x_{p_n})=0$.

    Por outro lado, como ϕ é contínua em $[a,b]$, $\lim\phi(x_{p_n})=\phi(\lim x_{p_n})$. Logo, se $l=\lim x_{p_n}$, temos $\phi(l)=0$.

12. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[0,1]$.

   a) Se existisse uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo n, então $\lim g(x_n) = +\infty$. Tomando uma subsucessão (x_{p_n}) convergente de (x_n), que existe pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, teríamos:
   $\lim g(x_n) = +\infty$,
   $\lim g(x_{p_n}) = g(\lim x_{p_n})$, porque g é contínua.
   Logo $g(\lim x_{p_n}) = +\infty$, o que é absurdo.
   (Alternativamente, g não seria limitada em $[0,1]$, o que é impossível, do Teorema de Weierstrass, uma vez que g é contínua em $[0,1]$.)

   b) Se (x_n) de termos em $[0,1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Além disso, sendo (x_n) limitada, possui uma subsucessão convergente em $\mathbb{R}$ como na alínea anterior. Designemos essa subsucessão como (x_{p_n}) e $\lim x_{p_n} = c$. Como $(x_{p_n}) \subset [0,1]$ e este intervalo é fechado $c \in [0,1]$. Como $(g(x_{p_n}))$ é uma subsucessão de $(g(x_n))$ temos também $\lim g(x_{p_n}) = 0$. Pelo critério de continuidade de Heine $\lim g(x_{p_n}) = g(c)$ e portanto $g(c) = 0$.

13. a) $\frac{x+1}{x^3+x}$ é dada pelo quociente de duas funções polinomiais, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

   b) Como a): é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\}$;

   c) $\sqrt{x}$ é contínua em $[0,+\infty[$, $\frac{1}{x^2+x}$ é contínua no seu domínio (como em a)), ou seja em $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$. Logo $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$ é contínua em $[0,+\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}) =]0,+\infty[$;

   d) $\operatorname{sen}\left(\cos \sqrt{1-x^2}\right)$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1,1]$;

   e) Como d): é contínua no seu domínio, $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\} =]-1,1[$;

   f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios logo é contínua no seu domínio, ou seja em $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x \neq k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

   g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}$. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é também dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio que é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo será contínua no seu domínio que é $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. (Nota: $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = 1$, se $x < -1 \vee x > 1$, e $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = -1$, se $-1 < x < 1$.)

   i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio, que é $D = \{x \in \mathbb{R} : -\operatorname{sen}^2 x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}^2 x =$

$0\} = \{k\pi \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$. (Alternativamente, nota-se que a função é constante e igual a 0 em D, logo contínua porque qualquer função constante é contínua; ainda de outra forma pode-se notar que qualquer função cujo domínio é formado exclusivamente por *pontos isolados*[1], é necessariamente contínua (prove esta afirmação!).)

14. Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto 1, e $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, então, como $\operatorname{sen} x$ é uma função contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$, g será contínua em $a \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

15. Como tg e cotg são contínuas, respectivamente em $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$. Como,
$$\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - 1}{\operatorname{tg} a},$$
e, portanto, $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$ equivale a $\operatorname{tg} a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

16. Temos
$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Para $a \neq 0$: se $a \in \mathbb{Q}$, podemos definir $x_n = a + \frac{1}{n}$, $y_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ e temos

    - $x_n \to a$, $y_n \to a$,
    - $x_n \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_n) = 0 = f(a)$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(y_n) = y_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a \neq 0$.

    Logo f não é contínua em a (usando a definição no sentido de Heine). Para $a \notin \mathbb{Q}$, a demonstração é semelhante.

    (Alternativamente, usando a definição no sentido de Cauchy, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \delta$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.)

    Para $a = 0$: se (x_n) é uma sucessão arbitrária tal que $x_n \to 0$, então $f(x_n) = x_n d(x_n)$. Como d é limitada, $d(x_n)$ é uma sucessão limitada. Logo, como $x_n \to 0$, temos $f(x_n) = d(x_n)x_n \to 0 = f(0)$. Logo f é contínua em 0.

    (Alternativamente, usando a definição de continuidade no sentido de Cauchy,
$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|.$$

[1] $a \in D$ é um ponto isolado de D se existir $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(a) \cap D = \{a\}$.

Logo, dado $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$, por exemplo, $\epsilon = \delta$ tal que

$$|x - 0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \delta.$$

Logo f é contínua em 0.)

17. a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|x - 0| < \epsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta}.$$

Então, dado $\delta > 0$, temos

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x^2 < \delta \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\delta}.$$

Tomando, por exemplo, $\epsilon = \sqrt{\delta}$, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

c) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$x > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\delta}.$$

Dado $\delta > 0$, temos

$$\sqrt{x} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\delta^2}.$$

Tomando, por exemplo, $\epsilon = \delta^2$, mostramos que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

18. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = 1$;

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)+x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} x\, \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = 0 \cdot 1 = 0$, uma vez que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1 - \cos\frac{1}{x})\right] = 0$ (como g)).

e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe: se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ temos que

- $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$;
- $\operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{y_n} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.

Como $\lim \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} \neq \lim \operatorname{sen}\frac{1}{y_n}$ e (x_n), (y_n) são sucessões convergente para 0, temos que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe.

f) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \operatorname{sen}(0) = 0$;

g) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$: dada uma sucessão arbitrária (x_n) tal que $x_n \to 0$ (e $x_n \neq 0$), temos

$$\lim x_n \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$$

uma vez que (x_n) é um infinitésimo e $(\operatorname{sen}\frac{1}{x_n})$ é uma sucessão limitada.

19. a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x-2)}=-1,$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x\arccos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\,\frac{5}{\cos x\arccos x}=1\cdot\frac{5}{\frac{\pi}{2}}=\frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1.$

20. Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$, temos

$$\lim f\left(-\frac{1}{n}\right)=f(0^-),\quad \lim f\left(\frac{1}{n}\right)=f(0^+).$$

Então,

$$f\left(-\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)=1\Rightarrow f(0^-)+f(0^+)=1.$$

Se existir $\lim_{x\to 0}f(x)$, temos $f(0^-)=f(0^+)=\lim_{x\to 0}f(x)$. Como $f(0^-)+f(0^+)=1$, temos $2\lim_{x\to 0}f(x)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$.

21. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x+|x|}{2}\,d(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\vee x<0,\\ x, & \text{se } x>0\wedge\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

a) Para $x\le 0$, temos $f(x)=0$, logo $f(]-\infty,0])=\{0\}$. Para $x>0$ temos $f(x)=0$, se $x\in\mathbb{Q}$ e $f(x)=x$ se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Logo $f(]0,+\infty[=\{0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}:x>0\}=\{0\}\cup\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$. Assim, $f(\mathbb{R})=\{0\}\cup\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$.

A função não é majorada, uma vez que $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$ não é majorado, é minorada por 0.

b) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}0=0;$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ não existe: se $x_n=n$ então $f(x_n)=0$, se $y_n=\sqrt{2}n$ então $f(y_n)=\sqrt{2}n\to+\infty$.

c) f contínua para $x\le 0$ (ver Ex.16).

22. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x\le -1,\\ \operatorname{arcsen}x, & \text{se } -1<x<1,\\ K\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x\ge 1.\end{cases}$$

a) Como f é contínua em 1, temos $f(1)=f(1^+)=f(1^-)$. Temos $f(1)=K$ e

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\operatorname{arcsen}x=\frac{\pi}{2}.$$

Logo $K=\frac{\pi}{2}$.

b) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (justificar!).

c) A partir dos contradomínios de arcsen e sen temos

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty,-1]) \cup f(]-1,1[) \cup f([1,+\infty[) \\ &= \{0\} \cup \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty}$, não existe (justificar!).

23. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Para $a > 0$: φ é contínua em a uma vez que numa vizinhança de a é dada pela função $1 + e^{1-x}$, que é contínua por ser dada pela composição de funções contínuas. Para $a < 0$: φ é contínua em a uma vez que numa vizinhança de a é dada pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, que é contínua (em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) por ser dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios.

b) $\varphi(0^+) = \lim_{x\to 0^+} 1 + e^{1-x} = 1 + e$
$\varphi(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.
Como $\varphi(0^+) \neq \varphi(0^-)$, φ não é contínua em 0. Mas $\varphi(0^+) = \varphi(0)$, logo φ é contínua à direita em 0.

c) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{1-x} = 1$,
$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0$.

d) $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]-\infty,0[) \cup \varphi([0,+\infty[) = \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\cup]1,1+e]$ (justifique!).

24. a)
- φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$, e $\lim_{x\to 0} \psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, uma vez que para qualquer sucessão (x_n) com $x_n \to 0$, temos
$$\lim x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = 0$$
por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada. Por outro lado,
- $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$ não existe, uma vez que para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tem-se $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e $\lim \cos \frac{1}{x_n} = \lim \cos(2n\pi) = 1$ e $\lim \cos \frac{1}{y_n} = \lim \cos((2n+1)\pi) = -1$.
Logo $\lim_{x\to 0} \psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c)
- $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.
- Para ψ: $\cos \frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$. Quanto a $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, temos
$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$
e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a, +\infty[$ e em $]-\infty, -a]$. Para $x \in [-a, a]$, temos
$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq a.$$
Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a, a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)

25. a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$.

b)
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = 0.$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$$

c) $f(D) = f([0, 1[) \cup f(]1, +\infty[)$.

- $f([0,1[)$: se $x \in [0,1[$, então $x-1<0$ e assim $f(x) \leq 0$, ou seja $f([0,1[) \subset]-\infty,0]$. Por outro lado, como $f(0)=0$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty,0] \subset f([0,1[)$. Logo, $f([0,1[) =]-\infty,0]$.
- $f(]1,+\infty[)$: se $x \in]1,+\infty[$, então $f(x)>0$, ou seja $f(]1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$. Como f é contínua em $]1,+\infty[$, e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0,+\infty[\subset f(]1,+\infty[)$. Logo, $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d)
- (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1-\frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.
- (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

26. a) f e g são contínuas no seu domínio, $]0,+\infty[$, por serem dadas pela composição e produto de funções contínuas nos seus domínios.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, logo f não é prolongável por continuidade a 0; $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, logo g é prolongável por continuidade a 0.

d) Como f é contínua em $\mathbb{R}^+$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, temos do Teorema do Valor Intermédio, que $f(D) = \mathbb{R}$.

(Alternativamente, $x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow 1+x \in]1,+\infty[$ e $\log(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$. Logo, $f(D) = \log(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.)

27. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

b) Em $a>0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\log\frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

Em $a<0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log\frac{1}{1+x^2} = \log(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \log \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, com $\epsilon > 0$.

Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\epsilon, 0[$ que $g(x) \leq g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\log \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \epsilon]$, $g(x) \leq g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\max_{x \in [-\epsilon, \epsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

28. a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

$$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que φ tem máximo e mínimo em D.

b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1, 1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \log(x)$, então $\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \to -1^+} \varphi(x) = -\infty$.

29. Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\lim_{x \to b} g(x) = -\infty.$$

Queremos ver que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2], \ x \in]a, b[.$$

Então, para $x \in]a, b[$, a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$. Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x \to a^+} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x \to b^-} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a,b[$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a,b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0,+\infty[$ e portanto

$$h(]a,b[) = \operatorname{arctg}([0,+\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $h([a,b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

30. Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen}^3 0 + \cos^3 0 = 1$ e para $x = \pi$, $\operatorname{sen}^3 \pi + \cos^3 \pi = -1$. Se $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 < 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x \in]0,\pi[$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$.

31. Seja f contínua em $\mathbb{R}$ tal que existem e são finitos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b,+\infty[$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

      Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a,b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

   b) Para $g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x) \leq 1$ e $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, logo como f é contínua, o Teorema do Valor Intermédio garante que existe c tal que $f(c) = 0$. Temos neste caso $g(c) = 1 = \max g$.