6 Cálculo Integral (Soluções)

1. (a) Seja $d = \{0 = t_0, ..., t_n = 2\}$ uma decomposição de $[0,2]$. Podemos assumir que $1 \in d$ (caso contrário, toma-se $d' = d \cup \{1\}$, e tem-se $S_{d'}(f) \leq S_d(f)$, $s_{d'}(f) \geq s_d(f)$). Seja $1 = t_k$, para algum $k \in \{1, ..., n-1\}$. Tem-se então, escrevendo $M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$,

$$M_i = 1, \ 1 \leq i \leq k-1, \quad M_k = 2, \quad , M_i = 3, \ k+1 \leq i \leq n,$$

$$m_i = 0, \ 1 \leq i \leq k, \quad m_{k+1} = 2, \quad , m_i = 3, \ k+2 \leq i \leq n.$$

As somas superior e inferior ficam:

$$\begin{aligned} S_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_{k-1} - t_{k-2}) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_{k+1} - t_k + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_{k-1} - t_0) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_n - t_k) \\ &= t_{k-1} + 2(1 - t_{k-1}) + 3(2 - 1) = 5 - t_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_k - t_{k-1}) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_{k+2} - t_{k+1} + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_k - t_0) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_n - t_{k+1}) \\ &= t_k + 2(t_{k+1} - 1) + 3(2 - t_{k+1}) = 5 - t_{k+1}. \end{aligned}$$

Como $1 = t_k \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$, escrevendo $t_{k-1} = 1 - \epsilon_1$, $t_{k+1} = 1 + \epsilon_2$, com $1 > \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ arbitrários, temos

$$S_d(f) = 5 - t_{k-1} = 4 + \epsilon_1 \geq 4, \qquad s_d(f) = 5 - t_{k+1} = 4 - \epsilon_2 \leq 4.$$

(b) Na alínea anterior vimos que dados $1 > \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ arbitrários, existe d tal que

$$S_d(f) = 4 + \epsilon_1, \qquad s_d(f) = 4 - \epsilon_2.$$

Conclui-se então que

$$\overline{\int_0^2} f = \inf\{S_d(f) \, : \, d \text{ decomposição de } [0,2]\} \leq \inf_{1 > \epsilon_1 > 0} (4 + \epsilon_1) = 4,$$

$$\underline{\int_0^2} f = \sup\{S_d(f) \,:\, d \text{ decomposição de } [0,2]\} \geq \sup_{1>\epsilon_2>0}(4-\epsilon_2) = 4.$$

Logo, temos $4 \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq 4$, ou seja, $\underline{\int_0^2} f = \overline{\int_0^2} f = 4$. Assim, f é integrável com $\int_0^2 f = 4$.

2. (a) Seja $f \geq 0$. Para cada decomposição $d = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se neste caso

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S_d(f^2) - s_d(f^2) &= \sum_{i=1}^n (M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)), \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, como f é integrável, podemos escolher a decomposição d tal que $S_d(f) - s_d(f) < \frac{\epsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$S_d(f^2) - s_d(f^2) < \epsilon.$$

Conclui-se que f^2 é integrável para $f \geq 0$ integrável.

Para f arbitrária, como f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

(b) De $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que fg é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass será limitada em $[a,b]$, ou seja, existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,b]$. Pela monotonia do integral:

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Por outro lado, se $g \geq 0$, temos $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Se $\int_a^b g(x)dx = 0$, o resultado é válido para qualquer $c \in]a, b[$; para $\int_a^b g(x)dx > 0$ temos:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, de novo porque f é contínua, f assume em $[a, b]$ todos os valores entre m e M, logo existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

4. Se, por contradição, $f(x) = 0$ não tivesse raizes, segue da continuidade de f e do Teorema do Valor Intermédio que f não muda de sinal em $[a, b]$. Mas se $f > 0$ em $[a, b]$, da monotonia do integral tem-se $\int_a^b f(x)dx > 0$, o que é impossível. Da mesma forma, não pode ser $f < 0$ em $[a, b]$. Conclui-se que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

5. Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum a, como f é contínua, seria $f(x) > 0$ em $]a - \epsilon, a + \epsilon[$, para algum $\epsilon > 0$. Da monotonia do integral, $\int_{]a-\epsilon,a+\epsilon[} f(t)\, dt > 0$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Alternativamente, tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\, dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo), temos

$$\left(\int_0^x f(t)\, dt \right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

6. Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2 \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ também será e

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt \right)' = \left(-x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\, dt \right)' \\ &= 2x \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}. \end{aligned}$$

7. a) $\operatorname{sen} x^2$. b) $-\cos x^2$. c) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$. d) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$. e) $4x^3 \operatorname{sen}(x^2) - 2x \operatorname{sen}(|x|)$.

8. Como f é contínua e $t \mapsto x - t$ é contínua, $(x-t)f(t)$ é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ é diferenciável com

$$\psi'(x) = \left(x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

De novo porque f é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ' é diferenciável, ou seja, ψ é duas vezes diferenciável, e

$$\psi''(x) = f(x).$$

9. Como f é diferenciável, e portanto contínua, podemos derivar ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = (xf(x))' \Leftrightarrow f(x) = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que $f'(x) = 0$, para $x \neq 0$, ou seja, f é constante em $]0,+\infty[$ e em $]-\infty, 0[$. Como é contínua, tem-se que f é constante em $\mathbb{R}$.

10.
$$\begin{aligned}\left(\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' &= \left(\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \int_0^{-\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\operatorname{sen} x \\ &= \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = 0.\end{aligned}$$

11. Temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$ a que se pode aplicar a Regra de Cauchy. Do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

12. a) O limite é uma indeterminação que pode ser levantada usando a regra de Cauchy. O cálculo da derivada da função que envolve um integral é consequência do teorema de derivação da função composta e do teorema fundamental do cálculo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{1/x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right).\end{aligned}$$

b) Da mesma forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cdot x^2 e^x}{3x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{3(e^x-1)} = \frac{2}{3}.$$

13. (a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.

(b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, F é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt \\ &> \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}(x-M). \end{aligned}$$

Como $\int_0^M f(t)\,dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty} \frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Considere:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

14. F é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma vez que é o produto de duas funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\frac{1}{x}$ e $\int_0^x f(t)\,dt$ (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = F(0)$$

uma vez que f é contínua em 0 (onde se usou a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo). Logo, F é contínua em 0. Em relação à diferenciabilidade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t) - xf(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{2x}$$

onde se usou de novo a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo. O limite acima existe sse f é diferenciável em 0 (e neste caso teríamos $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$).

15. Da continuidade de u e v, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar os seus integrais indefinidos e temos então

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt \Rightarrow \left(\int_a^x u(t)\,dt\right)' = \left(\int_b^x v(t)\,dt\right)' \Leftrightarrow u(x) = v(x).$$

Por outro lado, fazendo $x = b$, tem-se

$$\int_a^b u(t)\,dt = \int_b^b v(t)\,dt = 0.$$

17. a) $\log 2$. b) $\log(1/2)$. c) 0 d) 0.

18. a) $\log\sqrt{\dfrac{2}{e}}$. b) $\dfrac{\log 2}{4}$. c) $\dfrac{1}{2}$. d) $\operatorname{arctg}(3/4)$.

e) $\dfrac{1}{8}(\pi + \log 4)$ (subst. $t = \operatorname{tg} x$). f) $\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{note que } \dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}\right)$.

19. a) $$\int_1^\pi x \operatorname{arctg} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi (1 - \frac{1}{1+x^2})\,dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_1^\pi$$

$$= \frac{\pi^2+1}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

b) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

c) $$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$

$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

d) $$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx = [\log|x-3|]_0^1 = \log 2 - \log 3 = \log\frac{2}{3}.$$

e) $$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1|\right]_2^4 = \frac{80}{3} + \log 3.$$

f) $\int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}}\, dt = \int_1^e \frac{1}{x + x^2}\, \frac{1}{x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx$, fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \log x$. Tem-se

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

(verifique) e portanto

$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx = -1 - \frac{1}{e} + \log(1+e) + 0 + 1 - \log 2 = -\frac{1}{e} + \log\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

20. $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt$. Fazendo a mundança de variável $u = \frac{1}{t}$, tem-se

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t} e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)} dt = \int_1^x u e^{\left(\frac{1}{u}+u\right)} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_1^x \frac{1}{u} e^{\frac{1}{u}+u}\, du = -F(x).$$

21. Considerando a mudança de variável sugerida

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\, dt = \frac{1}{x} \int_1^{\frac{1}{x}} f(y)\, dy.$$

que se pode diferenciar usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta.

22. Use a mudança de variável $y = 1/x$.

23. Uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = e^{-x^2}$, usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\, dx &= [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = F(1) + \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^1 \\ &= F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

24. a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\, dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que f é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! É necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se F é uma primitiva de f e é periódica de período T, temos

$$\int_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo F é periódica de período T.

25. a) Como a função integranda $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t^2}$ é contínua o integral existe qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Como a função integranda é positiva e $x \mapsto x^2$ é estritamente crescente para $x > 0$ o integral é estritamente crescente para $x \geq 0$. Como a função é par é estritamente decrescente para $x \leq 0$. (Alternativamente, justifique os resultados de monotonia derivando o integral usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta; obtém-se $f'(x) = 2xe^{x^4}$ e as mesmas conclusões seguem com facilidade.)

b) Como $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \ni t \mapsto \frac{1}{\log t}$ é ilimitada numa qualquer vizinhança direita de 1 o integral não está definido se $e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$. O integral está definido para $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ pois a função integranda é nesse caso contínua no intervalo fechado definido pelos extremos do intervalo de integração. Para $x > 0$:

$$g'(x) = e^x \frac{1}{\log e^x} = \frac{e^x}{x} > 0$$

pelo que a função g é estritamente crescente. Um zero óbvio de g corresponde aos extremos de integração serem iguais, isto é $x = \log 2$, sendo portanto $g(x) < 0$ se $x < \log 2$ e $g(x) > 0$ se $x > \log 2$.

c) Temos $h(x) = x \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,dt - \int_1^x te^{t^2}\,dt$. As funções integrandas $t \mapsto e^{t^2}$ e $t \mapsto te^{t^2}$ são contínuas logo podemos derivar h usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra de derivação do produto:

$$h'(x) = \int_1^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2} - xe^{x^2} = \int_1^x e^{t^2}\,dt.$$

Como $e^{t^2} > 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $h'(x) > 0$ para $x > 1$ e $h'(x) < 0$ para $x < 1$, ou seja, h é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 1[$, tendo um mínimo no ponto 1.

26. a) Note-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de f em qualquer intervalo limitado sendo os integrais de $\tilde{f}$ e f iguais.

b)

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x f = \frac{d}{dx}\int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

Note-se que a não continuidade de f não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de f e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.

27. a) Note-se que a função integranda é não negativa e contínua. Tal acarreta que o integral vai ser positivo se $x > x^2$ (isto é $x \in\,]0,1[$), negativo se $x < x^2$ (isto é $x \in\,]-\infty,0[\, \cup\,]1,+\infty[$), e nulo se $x = x^2$ (isto é $x \in \{0,1\}$).

b) Da alínea anterior decorre que basta estimar o integral para $x \in\,]0,1[$. Para tal note-se que se $x \in\,]0,1[$ o intervalo de integração está contido no intervalo $[0,1]$ e aí a função integranda pode ser majorada por $\frac{t}{1+t^2}$. O cálculo do integral desta última função entre x^2 e x conduz então à majoração pretendida.

28. (a) Uma vez que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, logo contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da derivada da função composta que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = f(x^2 - 4x + 3)(2x - 4).$$

Como $f < 0$ em $\mathbb{R}$, tem-se $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$. Logo, g é crescente para $x < 2$, decrescente para $x > 2$ e assim g terá um ponto de máximo em 2. Não tem mais pontos de extremo uma vez que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a derivada só se anula em 2.

Dado que $f < 0$, tem-se

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 3,$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

e

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 3.$$

Para a concavidade:

$$g''(x) = f'(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)^2 + 2f(x^2 - 4x + 3) < 0,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, uma vez que f e f' são negativas. Conclui-se que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

(b) Há dois aspectos a verificar. Por um lado, g é majorada porque é contínua e tem um único ponto de máximo em 2, logo $g(x) \leq g(2)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, para qualquer $x > 3$ temos $x^2 - 4x + 3 > 0$. Segue da monotonia do integral e de f ser decrescente, uma vez que $f' < 0$, que $f(t) \leq f(0)$, para $0 < t < x^2 - 4x + 3$ e que

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt \leq \int_0^{x^2-4x+3} f(0)\,dt = f(0)(x^2 - 4x + 3).$$

Logo, como $f(0) < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f(0)(x^2 - 4x + 3) = -\infty,$$

e g não é minorada.

29. (a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como x e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fazendo a mudança de variável $u = -t$ temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-1)\,du \\ &= \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u}\,du = f(x). \end{aligned}$$

Logo f é par,

(b) f é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_a^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_a^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \\ &= \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, \end{aligned}$$

em que tomamos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

(c) Como cos é decrescente em $]0, \pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja f é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$. Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leq \int_x^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = [\log t]_x^{3x} = \log 3.$$

Logo f é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset]0, +\infty[$.
Conclui-se que existe $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Como f é par, existe também $f(0^-) = f(0^+)$, logo existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

30. (a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\,dt = \int_0^x \phi(-u)(-1)\,du = -g(x)$, notando que ϕ é par.

(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$ - ver Ex. 26.)

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como g é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que g é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + \frac{2}{a} \leq g(a) + \frac{2}{a}.$$

31. a)
$$\begin{aligned}\phi(2) &= \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t\,dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \log t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)}\,dt \\ &= -\frac{\log 2}{10} + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \frac{13}{20}\log 2 - \frac{1}{4}\log 5.\end{aligned}$$

b) $\phi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \log x$, para $x > 0$.

c) Tem-se $\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, ϕ é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]0, 1[$.

Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de ϕ' entre 1 e c. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de ϕ.

32. a) $\frac{1}{3}$

    b) $\int_0^1 (4x - x)\,dx + \int_1^2 (4x - x^3)\,dx = \frac{15}{4}$.

    c) $a(\log a - 1) + 1$

33. a) $A = 2\displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (9 - x^2 - x^2)\,dx = 18\sqrt{2}$,

    b) $$A = 2\int_0^1 \left(\sqrt{2(2-x)} - \sqrt{4(1-x)}\right) dx + 2\int_1^2 \sqrt{2(2-x)}\,dx$$
$$= 2\int_0^2 \sqrt{2(2-x)}\,dx - 2\int_0^1 \sqrt{4(1-x)}\,dx = \frac{8}{3}$$

    c) $A = \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{-x}{8}\right) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-27x - \frac{-x}{8}\right) dx = \frac{15}{4}$,

    d) $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{12}$,

    e) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2)\,dx = \frac{7}{48}$,

    f) $A = \displaystyle\int_0^1 e^x - (1-x)\,dx = e - \frac{3}{2}$.

34. De $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ temos $y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x = 2\,\text{sen}\,t$):

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\,dt = 4\left[\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

35. As duas curvas intersectam-se em $(-1, \sqrt{3})$ e $(-1, \sqrt{3})$(verifique). Temos
$$A = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{3}x^2\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$
(Faça a substituição $x = 2\,\text{sen}\,t$ para primitivar $\sqrt{4 - x^2}$).

36. $A = \displaystyle\int_0^1 \text{arctg}\,x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$ (verifique!)

37. $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\text{arctg}\,x - \frac{\pi}{16}x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}x^2\right) dx = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{3}$.

38. As curvas intersectam-se nos pontos $(1,0)$ e $(e,1)$, e para $x \in [1,e]$, $\log x \geq \log^2 x$. Temos

$$
\begin{aligned}
A = \int_1^e \left(\log x - \log^2 x\right) dx &= \left[x\left(\log x - \log^2 x\right)\right]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\log x\right) dx \\
&= e(1-1) - 1(0-0) - [x]_1^e + \int_1^e 2\log x\, dx \\
&= -e + 1 + [2x\log x]_1^e - \int_1^e 2\, dx = 3 - e.
\end{aligned}
$$