3 Funções reais de variável real

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

   c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

   d) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in \left]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Identifique $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

3. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

4. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\arccos x) = x$,

   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$,

   c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

   d) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

   e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

   f) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

5. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

   a) Se f é crescente (resp. decrescente), então g é crescente (resp. decrescente).

b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

6. Esboçe os gráficos de arcsen, arcos, arctg a partir dos gráficos de sen, cos e tg.

7. Determine o domínio das funções seguintes:

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,
   b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,
   c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,
   d) $f(x) = \log(\log x)$,
   e) $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{2}})$,
   f) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,
   g) $f(x) = \operatorname{arcos}\left(\frac{1}{x}\right)$,
   h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,
   i) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$.

8. (Exercício 3.17 de [2]) Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente.

9. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

10. Seja (x_n) uma sucessão real, com $\lim x_n = 1$, $x_n > 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Calcule, se existir, $\lim f(x_n)$ nos casos seguintes:

    a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
    b) $f(x) = \log x$, $x > 0$.
    c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, para $x \neq 1$.

11. (Exercício 3.5 de [2]) Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Supondo que existe uma sucessão (x_n) de termos em $[a, b]$ tal que $\lim \phi(x_n) = 0$, prove que ϕ tem pelo menos um zero em $[a, b]$.

12. (Exercício 3.14 de [2]) Sendo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

    a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.
    b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

13. (Exercício III.2 de [1]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine os pontos de continuidade e descontinuidade:

    a) $\frac{x+1}{x^3+x}$;
    b) $\frac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;
    c) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$;
    d) $\operatorname{sen}\left(\cos \sqrt{1-x^2}\right)$;
    e) $\cos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
    f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;
    g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;
    h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$;
    i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$;

14. (Exercício 3.15 de [2]) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

16. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet, é apenas contínua em $x = 0$.

17. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,
    b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$,
    c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

18. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,
    b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,
    c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$,
    d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos \frac{1}{x})\right]$,
    e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,
    f) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

g) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

19. (Exercício 3.20 de [2]) Calcule

    a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$,

    b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$.

    Outros exercícios: 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12, 3.13 de [2].

20. (Exercício 3.18 de [2]) Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, a função f verifica a condição
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$
    Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

21. (Exercício 3.26 de [2]) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}\, d(x),$$
    onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.

    a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

    b) Estude $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

    c) Em que pontos é f contínua?

22. (Exercício 3.27 de [2]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

    a) Determine K.

    b) Estude f do ponto de vista da continuidade.

    c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

    d) Quais são os limites $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, caso existam?

23. (Exercício 3.34 de [2]) Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto (por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D, sse a sua restrição a $]-\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a).

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.

d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

24. (Exercício 3.29 de [2])

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

25. (Exercício 3.32 de [2]) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

26. (Exercício 3.33 de [2]) Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log\log(1 + x), \qquad g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

27. (Exercício 3.36 de [2]) Seja f, a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \log \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.
   c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.
   d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

28. (Exercício 3.40 de [2])

   a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1 - x^2)$ tem máximo e mínimo.
   b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

29. (Exercício 3.43 de [2]) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Mostre que existe uma e uma só função contínua h, definida em $[a, b]$ e tal que $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$ para $x \in]a, b[$. Determine o seu contradomínio.

30. (Exercício III.11 de [1]) Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

31. (Exercício III.15 de [1]) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   a) Prove que f é limitada.
   b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função $g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$.

Outros exercícios: 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.28, 3.34, 3.37, 3.38, 3.42 de [2].

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.