6 Cálculo Integral

1. (Exercício VI.1 de [1]) Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$

   (a) Mostre que para toda a decomposição do intervalo $[0,2]$, as somas superior $S_d(f)$ e inferior $s_d(f)$ verificam $s_d(f) \leq 4 \leq S_d(f)$.

   (b) Recorrendo directamente à definição, mostre que f é integrável e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

2. (a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

   (b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

3. (Exercício VI.3 de [1]) Prove que, se f é contínua em $[a,b]$ e g é integrável e não negativa em $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

4. (Exercício VI.7 de [1]) Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a,b]$.

5. (Exercício 6.10 de [2]) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

6. (Exercício 6.13 de [2]) Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

7. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a)} \int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt, \qquad \text{b)} \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\, dt,$$

$$\text{c)} \int_x^{2x} e^{t^2}\, dt, \qquad \text{d)} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt, \qquad \text{e)} \int_{x^2}^{x^4} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\, dt.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e calcule $\psi''(x)$.

9. (Exercício 6.9 de [2]) Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ verificando a condição

$$\int_0^x f(t)\, dt = x f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

10. Mostre que a função seguinte não depende de x:

$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

11. (Exercício 6.16 de [2]) Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

12. Calcule os limites:

$$\text{a)} \lim_{x \to +\infty} x \int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t e^{\sqrt{t}}\, dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt}.$$

13. (Exercício 6.53 de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

    (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

    (b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.

    (c) Prove que se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

14. (Exercício 6.46.c) de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

15. (Exercício VI.15 de [1]) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t)\,dt = 0$.

16. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

   a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (6.1).
   b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (6.1) então f é par e g é ímpar.
   c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (6.1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

Outros exercícios : 6.4, 6.6, 6.12, 6.17, 6.19, 6.20, 6.55 de [2].

.

17. Calcule

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{c)} \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^1 \operatorname{tg} x\,dx.$$

18. Calcule

$$\text{a)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \operatorname{arctg} x\,dx,$$

$$\text{c)} \int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx, \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx,$$

$$\text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx, \qquad \text{f)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

19. (Exercícios 6.23, 6.24, 6.26, 6.32 de [2]) Calcule

$$\text{a) } \int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x \, dx, \qquad \text{b) } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx, \qquad \text{c) } \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx,$$

$$\text{d) } \int_0^1 \frac{1}{x-3} \, dx, \qquad \text{e) } \int_2^4 \frac{x^3}{x-1} \, dx, \qquad \text{f) } \int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}} \, dt$$

20. (Exercício V.9 de [1]) Sendo $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$, $x > 0$, mostre que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

21. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ através da expressão $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx) \, dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 0.$$

(**Sugestão:** considere a mudança de variável $tx = y$.)

22. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} \, dt.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

23. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, dt$. Mostre que

$$\int_0^1 F(x) \, dx = F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.$$

(**Sugestão:** use integração por partes.)

24. (Exercício 6.45 de [2]) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

   (a) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t) \, dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T sse $\int_0^T f(t) \, dt = 0$.

25. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt$,

b) $g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\, dt$,

c) $h(x) = \int_1^x (x-t)e^{t^2}\, dt$.

26. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\, ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

27. Considere a função de variável real definida por $\psi(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{|t|e^{-t^4}}{1+t^2}\, dt$.

a) Calcule os zeros e o sinal de ψ;

b) Mostre que $\psi(x) \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} \log\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right), \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

28. (Exercício 6.49 de [2]) Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ e $f'(x) < 0$, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\, dt.$$

(a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raizes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

(b) A função g é majorada? E minorada?

29. (Exercício 6.56 de [2]) Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

(a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.

(b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$?

30. (Exercício 6.51 de [2]) Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt$.

(a) Justifique que g é ímpar.

(b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.

(c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.

(d) Justifique que g é limitada.

31. (Exercício V.14 de [1]) Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t \, dt.$$

a) Calcule $\phi(2)$.

b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

32. Calcule as áreas de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$,

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; y \geq x, \; y \geq x^3, \; y \leq 4x\}$,

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \wedge x \leq a\}$, $a > 1$.

33. (Exercício V.11 de [1]) Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$,

b) $y^2 = 4(1 - x)$ e $y^2 = 2(2 - x)$,

c) $x^2 y = 1$, $y = -27x$, e $x = -8y$,

d) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$,

e) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, e $y = x^2$,

f) $y = e^x$, $y = 1 - x$, $x = 1$.

34. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

35. (Exercício 6.61 de [2]) Calcule a área de região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq \sqrt{3}x^2$.

36. (Exercício 6.62 de [2]) Calcule a área de região do plano limitada pelo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

37. (Exercício 6.63 de [2]) Calcule a área de região plana consitituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \qquad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \qquad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

38. (Exercício 6.70 de [2]) Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas de equações
$$y = \log x, \qquad y = \log^2 x.$$

Outros exercícios : 6.35, 6.39, 6.48, 6.57, 6.60, 6.68, 6.71, 6.76, 6.79a) de [2].

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.