Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste/2º Teste/ Exame

Campus da Alameda **23 de Junho de 2012, 8:00 horas**

LEIC (Prova A)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

1. Considere

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x^2-1} \leq 1 \right\}, \qquad B =]-\infty, 2], \qquad C = A \cap B$$

   a) Escreva o conjunto A sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos e mostre que $C =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup \{2\}$.

   b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf(C \cap \mathbb{Q})$, $\min(C \cap \mathbb{R}_0^+)$, $\sup(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\text{máx}(C \cap \mathbb{R}_0^+)$ e $\sup(C \cap \mathbb{Z})$.

2. Calcule ou mostre que não existe (em $\overline{\mathbb{R}}$) cada um dos seguintes limites:

$$\lim \frac{3n^3 + 5n(n-1)^5}{5 + \pi n^6 + n^3}, \quad \lim \frac{n! + 2n}{3^n + (n+1)!}, \quad \lim \frac{\sqrt{n} + \operatorname{sen}(1 + 2^n)}{1 + 3n^2}, \quad \lim \left(1 - \frac{2}{n^n}\right)^{2n^n}$$

3. Considere uma sucessão real $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termos positivos e majorada. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

   a) A sucessão a_n é limitada.

   b) Se a_n é decrescente, então a_n é convergente e $\lim a_n = 0$.

   c) O conjunto dos sublimites de a_n é não vazio.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \arccos(x-1) & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \log(x-1) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   a) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Calcule (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$) os limites

$$\lim_{x \to 0^-} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to 2^-} f(x), \lim_{x \to 2^+} f(x).$$

   c) Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = 2$? Justifique.

   d) Indique o contradomínio de f.

5. Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \in V_{\frac{1}{n}}(0) \cap \mathbb{R}^+, \qquad g(x_n) = \operatorname{sen}[(-1)^n].$$

   Será a função g prolongável por continuidade ao ponto 0? Justifique a sua resposta.

2º Teste

1. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x)}{2x}, \qquad \lim_{x\to e^+}(\log x)^{\frac{3}{x-e}}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\frac{3}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}, \qquad \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \qquad \frac{\cos x}{5+\operatorname{sen}^2 x}$$

3. Calcule, utilizando a substituição natural,

$$\int_0^2 \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$$

4. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}))$ e seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(x) = f(\operatorname{sen} x) + \int_x^{x^3} f(t)\,dt.$$

   Calcule ψ' e ψ''.

5. Para cada valor de $c \in \mathbb{R}$, determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nc^n}{n+1}.$$

6. Seja $f \in C^4(\mathbb{R})$ e suponha que $y = 3 + 2x$ é uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

   a) Calcule $f(0)$ e $f'(0)$. Poderá a função f ter um extremo local no ponto 0? Justifique.

   b) Supondo ainda que $f''(0) = f'''(0) = 2$ e que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f^{(4)}(x) \leq 6,$$

   prove que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f(x) \leq 3 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$