Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

Campus da Alameda **26 de Janeiro de 2009, 9 horas**

LEAmb, LEMat, LEANaval, MEB, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. 1. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites de sucessões:

$$\lim \frac{3n^2\left(n^3-2\right)+5}{2n^5-1}, \qquad \lim \sqrt[n]{3^n+\frac{1}{n!}}, \qquad \lim \left(1-\frac{2}{n!}\right)^{2(n!)}$$

2. Por indução matemática, mostre que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+3^k\right) = n+\frac{3}{2}\left(3^n-1\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

II. 1. Calcule ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$) os seguintes limites:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\log x}, \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\log x}.$$

2. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções

$$x^{\cos x}, \qquad \operatorname{arctg}\left(\log x\right)+\log\left(\operatorname{arctg} x\right), \qquad \operatorname{arcsen}(xe^x), \qquad \log(\log^2 x)$$

III. 1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes

$$\operatorname{sen} x.\cos^3 x, \qquad \frac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad x^5\log x^3$$

2. Calcule

$$\int_0^1 \frac{2e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$$

3. Determine a área da região plana delimitada pelos gráficos das funções $(x-1)^3$ e $(x-1)$.

IV. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ (x - \frac{\pi}{2})e^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Justifique que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Diga, justificando, se f é diferenciável no ponto 0.

c) Estude f quanto a monotonia e extremos locais.

d) Determine os pontos de inflexão e o sentido das concavidades do gráfico de f.

e) Indique, justificando, o contradomínio de f.

f) Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

V. Seja $g \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e $g'(0) = 1$. Considere a função ϕ definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$\phi(x) = \int_{x^2-1}^{\log x} g(t)\, dt.$$

a) Calcule ϕ' e ϕ''.

b) Mostre que ϕ tem um extremo local no ponto 1 e indique se se trata de um ponto de máximo ou de mínimo.