Cálculo Diferencial e Integral I

LEAmb, LEMat, LQ, MEB, MEEC, MEQ

2º teste / 1º exame - 7 de Janeiro de 2008

duração: 2º teste: 1:30 / 1º exame: 3:00

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para resolver o 2º teste responda apenas aos grupos III e IV.

(4.5 vals.) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{5+x}{2} > |x-1| \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{(x^2)} > 1 \right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]-1, 0[\cup]0, 7[$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$),

$$\min A, \quad \sup A, \quad \max(A \cap B), \quad \inf(A \cap B \cap \mathbb{R}^+), \quad \sup[(A \cap B) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})],$$

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em $A \cap B$ tem limite em $\mathbb{R}^+$.

(ii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem pelo menos um sublimite.

(iii) Se x_n é uma sucessão monótona de termos em $A \cap B$, então $(\cos x_n)$ é uma sucessão convergente.

(3 vals.) **II.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2^n - n + 1}{3^n + n^2}, \qquad \lim \left[\log \frac{(n+1)!}{n^2} - \log \frac{n!}{2n+1} \right], \qquad \lim \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}}.$$

(2.5 vals.) 2. Considere a sucessão a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2\,, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}\,, \quad \text{se } n \geq 1\,. \end{cases}$$

a) Mostre que, se $n \geq 2$, então $a_n \in]0, 1[$.

b) Prove que a_n é monótona decrescente.

c) Justifique que a_n é convergente e calcule $\lim a_n$.

Para o 2º Teste responda apenas às questões desta página

(1.8 vals.) **III.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to +\infty} (\log x)^x, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen}(x-1)}{x-1}.$$

(4 vals.) 2. Seja α uma constante real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0 \\ e^x - \dfrac{x}{2} + \alpha & \text{se } x \leq 0\,. \end{cases}$$

a) Determine α por forma que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}$.

b) Calcule, se existirem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

c) Será f diferenciável no ponto zero? Determine a função f'.

d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

e) Diga, justificando, qual é o contradomínio de f.

(1.2 vals.) **IV.** 1. Calcule

$$\int_0^1 x\sqrt{2+x^2}\, dx\,, \qquad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx\,.$$

(1 vals.) 2. Calcule a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções

$$y = x + 1\,, \qquad y = e^{-x}\,,$$

e pelas rectas

$$x = -2\,, \qquad x = 1\,.$$

(2 vals.) 3. Seja $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $g(x) > 2$, para todo $x > 0$. Considere a função f definida por

$$\forall_{x>0} \quad f(x) = \int_{1/x}^{x} g(t)\, dt\,.$$

a) Mostre que

$$\forall_{x>0} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)\,,$$

e estude o sinal de f em $\mathbb{R}^+$.

b) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule f'.