Cálculo Diferencial e Integral I
LEAmb, LEMat, MEB, MEEC, MEQ

1º teste - 17 de Novembro de 2007, 13:00

duração: 1:30

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(6,5 vals.) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-2)e^x}{|x|} \leq 0\}\right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]-1, 2] \setminus \{0\}$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$),

$$\inf B, \quad \sup B, \qquad \inf(A \cap B), \quad \sup(A \cap B), \quad \max(A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})),$$

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem subsucessões convergentes.

(ii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ estritamente decrescente converge para -1.

(iii) Se x_n é uma sucessão de termos em $A \cap B$, então $\frac{x_n}{n}$ é convergente.

(6,5 vals.) **II.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{2+e^n}{n+3^n}, \qquad \lim \left(1 + \frac{1}{n\pi}\right)^{2n}, \qquad \lim \sqrt[n]{\frac{2+n}{n!}}.$$

2. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3+1}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

(4 vals.) **III.** Seja f uma função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{|x-1|e^x}{x+1}.$$

a) Indique o domínio de f.

b) Estude f quanto à continuidade.

c) Calcule $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to -1^-} f(x)$.

d) Será f uma função limitada? Justifique.

(3 vals.) **IV.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em zero, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{n}.$$

a) Indique, justificando, o valor de $f(0)$.

b) Sendo $h(x) = \frac{x-1}{f(\operatorname{sen} x)}$, mostre que h está definida numa vizinhança de zero e indique, justificando, $h(0)$.

c) Sendo $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$, indique justificando os valores de

$$\lim_{x\to-\infty} g(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x).$$