TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I
2º Teste (Versão B)

LEIC-TP, LETI, LEE, LEGI

5 de Janeiro de 2015

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1^+} (\log x)^{x-1}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}, \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}\int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\,dt\,.$$

(4,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{2\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}, \qquad \text{b)}\ x^2\,\log\sqrt{x}, \qquad \text{c)}\ \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equações $y = x^2$ e $x = y^3$.

(3,5) **IV.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(e) = f'(e) = 0$. Define-se $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y)\,dy\,.$$

Calcule ϕ' e ϕ'' e mostre que $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$.

(3,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência ou divergência):

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!+n^{10}}.$$

(2,0) **VI.** Mostre que a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{x^2}^{x^4} e^{-t^2}\,dt$$

é uma função limitada.

Resolução

(4,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1^+} (\log x)^{x-1}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}, \qquad \text{c) } \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\, dt\,.$$

a) Como $(\log x)^{x-1} = e^{(x-1)\log(\log x)}$ consideramos primeiro

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(\log x)$$

Trata-se de uma "indeterminação" $0\cdot\infty$ que avaliamos usando regra de Cauchy sucessivamente da seguinte forma

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log x)}{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x\log x}}{-1/(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{(x-1)^2}{x\log x} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)}{\log x + 1} = 0.$$

Daí que

$$\lim_{x\to 1^+} (\log x)^{x-1} = e^0 = 1.$$

b) Notando que $-\frac{1}{x} \to +\infty$ quando $x \to 0^-$ obtemos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = +\infty.$$

c) Quando $x \to -1$ temos $\log(2+x) \to 0$ pelo que o integral tende para 0 pela continuidade do integral indefinido. Assim sendo estamos na presença de uma "indeterminação" $0/0$ que tentaremos resolver usando regra de Cauchy[1]. Note-se que a diferenciabilidade do integral vai ser assegurada pelo teorema fundamental do cálculo e pelo teorema de derivação da função composta pois a função $t \mapsto e^{\operatorname{tg} t}$ é contínua em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $x \mapsto \log(2+x)$ é diferenciável em $]-2, +\infty[$. Sendo assim

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\, dt = \lim_{x\to -1} \frac{e^{\operatorname{tg}(\log(2+x))}}{2+x} = e^0 = 1.$$

(4,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{2\cos x}{4 + \operatorname{sen}^2 x}, \qquad \text{b) } x^2 \log\sqrt{x}, \qquad \text{c) } \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,.$$

[1] Alternativamente pode notar-se que o limite a calcular é a definição da derivada da função $x \mapsto \int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\, dt$ no ponto -1.

a)

$$\int \frac{2\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)^2}\,dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right).$$

b)

$$\int x^2 \log\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\log x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right).$$

c)

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\log|e^{2x}-1|.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equações $y = x^2$ e $x = y^3$.

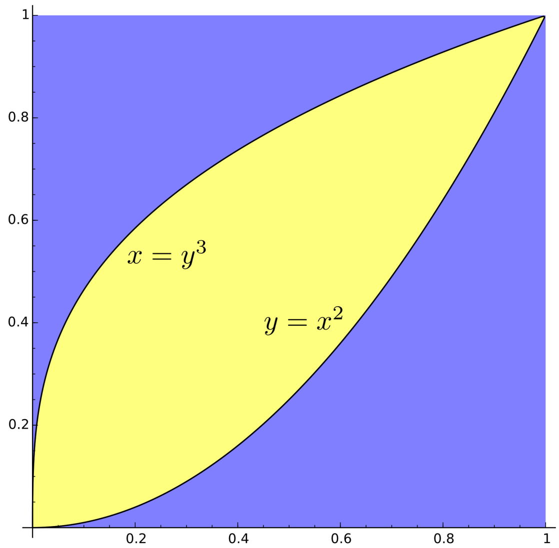

Figura 1: A região de que se pretende calcular a área.

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^2\right)\,dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

(3,5) **IV.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(e) = f'(e) = 0$. Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y)\,dy\,.$$

Calcule ϕ' e ϕ'' e mostre que $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$.

Usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta obtemos

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= e^x f(e^x) - \frac{1}{x} f(\log x)\\ \phi''(x) &= e^{2x} f'(e^x) + e^x f(e^x) - \frac{1}{x^2} f'(\log x) + \frac{1}{x^2} f(\log x),\end{aligned}$$

donde em particular

$$\begin{aligned}\phi'(1) &= ef(e) - f(\log 1) = -f(0),\\ \phi''(1) &= e^2 f'(e) + ef(e) - f'(\log 1) + f(\log 1) = f(0) - f'(0),\end{aligned}$$

e daí segue a igualdade pretendida.

(3,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n! + n^{10}}.$$

a) Como

$$\frac{\sqrt{n}+2}{n^2} > 0$$

e

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n}+2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1,$$

da convergência da série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$, concluímos que a série dada é absolutamente convergente.

b) Seja $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n! + n^{10}}$. Então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\frac{n! + n^{10}}{(n+1)! + (n+1)^{10}} = 2\frac{1 + \frac{n^{10}}{n!}}{n + 1 + \frac{(n+1)^{10}}{n!}}$$

e, portanto,

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$$

A série é, pois, absolutamente convergente.

(2,0) **VI.** Mostre que a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_{x^2}^{x^4} e^{-t^2}\, dt$$

é uma função limitada.

Para $x \geq 1$:

$$0 \leq \int_{x^2}^{x^4} e^{-t^2}\, dt \leq \int_{x^2}^{x^4} \sup_{t\in[x^2,x^4]} e^{-t^2}\, dt \leq (x^4 - x^2)e^{-x^4} \leq x^4 e^{-x^4} \leq \sup_{\lambda>0} \lambda e^{-\lambda} = e^{-1}.$$

(Atendendo a que

$$(\lambda e^{-\lambda})' = (1-\lambda)e^{-\lambda} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

facilmente se conclui que a função $\lambda \mapsto \lambda e^{-\lambda}$ tem um máximo absoluto no ponto $x = 1$.)

Dado que g é função par, tem-se

$$0 \leq g(x) \leq e^{-1} \qquad \forall x : |x| > 1.$$

Como, além disso, a função g é contínua em $\mathbb{R}$ (pelos teoremas da continuidade da função composta e da continuidade do integral indefinido), o teorema de Weierstrass garante que g é limitada em $[-1, 1]$.

Assim, g é função limitada em $\mathbb{R}$.