TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)   6 de Janeiro de 2014

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(\arccos x)}{x-1}$,   b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\arccos x)}{x^2}$,   c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\int_x^2 (2-x)\, e^{t^2}\, dt}{(x-2)^2}$.

Resolução

Usando a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental da Análise,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(\arccos x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cos(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\int_x^2 (2-x)\, e^{t^2}\, dt}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{\int_2^x e^{t^2}\, dt}{x-2} = \lim_{x\to 2} e^{x^2} = e^4.$$

Além disso, não havendo qualquer indeterminação, obtém-se directamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\arccos x)}{x^2} = +\infty.$$

(3,5) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{(x+3)^5}$,   b) $\dfrac{8\,e^x}{e^{2x}+4}$,   c) $x\log^2 x$.

Resolução

a)

$$\int \frac{1}{(x+3)^5}\, dx = \frac{(x+3)^{-5+1}}{-5+1} = -\frac{1}{4(x+3)^4}.$$

b)

$$\int \frac{8\,e^x}{e^{2x}+4}\, dx = \frac{16}{4} \int \frac{e^x/2}{1+(e^x/2)^2}\, dx = 4\operatorname{arctg}(e^x/2).$$

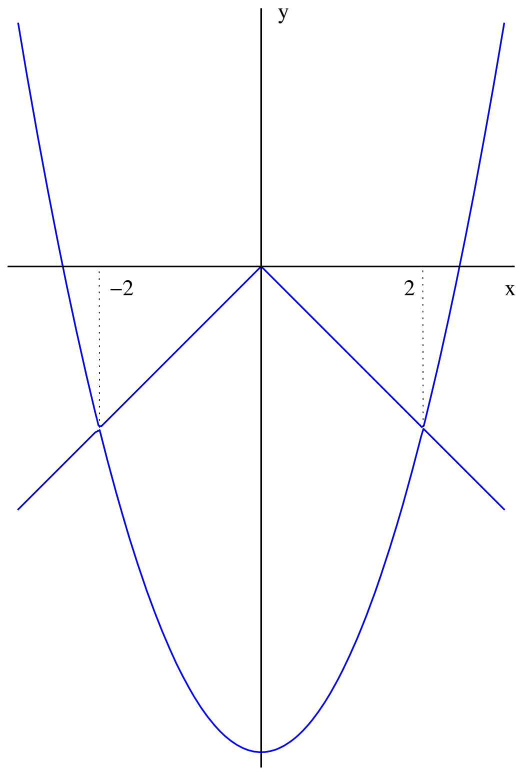
c)

$$\int x\log^2 x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int x\,\log x\, dx = \frac{x^2}{2}\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \int \frac{x}{2}\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\left(\log^2 x - \log x + \frac{1}{2}\right).$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região plana delimitada pelos gráficos das funções

$$f_1(x) = -|x| \qquad e \qquad f_2(x) = x^2 - 6.$$

Resolução



Designando por α a área da região, tem-se

$$\alpha = \int_{-2}^{2} (-|x| - (x^2 - 6))\, dx = 2\int_{0}^{2} (-x - x^2 + 6)\, dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \frac{44}{3}.$$

(3,0) **IV.** Sejam g uma função definida e diferenciável em $\mathbb{R}$ e h a função definida por

$$h(x) = \int_{2}^{x^2-x} g(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Calcule, justificando, h' e h''.

Resolução

Designando por ϕ a função integral indefinido com origem no ponto 2 da função g, isto é,

$$\phi(x) = \int_{2}^{x} g(t)\, dt,$$

tem-se $h(x) = \phi(x^2 - x)$. Como g é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (porque $g \in C^1(\mathbb{R})$), o Teorema Fundamental da Análise garante que ϕ é diferenciável (em $\mathbb{R}$) e, então,

$$h'(x) = (2x-1)g(x^2 - x).$$

Além disso, g é diferenciável pelo que h' é diferenciável e tem-se

$$h''(x) = 2g(x^2 - x) + (2x-1)^2 g'(x^2 - x).$$

(4,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+1}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+\sqrt[3]{n^2}}\,, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!+2}\,.$$

Resolução

a) Sendo uma série de termos positivos, podemos comparar com a série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Como

$$\lim \frac{n^2(n+1)}{n^3+2n+1} = 1 \in]0,+\infty[$$

conclui-se que as séries são da mesma natureza. Então, a série dada é absolutamente convergente.

b) Considerando a série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+\sqrt[3]{n^2}}$ e comparando-a (como na alínea anterior) com a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, concluímos que a série é divergente. Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

é uma série alternada, em que $a_n = \frac{1}{2+\sqrt[3]{n^2}}$ é uma sucessão de termos positivos, decrescente e com limite nulo. Logo, pelo critério de Leibniz, a série dada é simplesmente convergente.

c) A série dos módulos $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!+2}$ é convergente pois, usando o critério de D'Alembert, vem

$$\lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)!+2} \frac{n!+2}{2^n} = \lim 2 \frac{1+\frac{2}{n!}}{n+1+\frac{2}{n!}} = 0 < 1.$$

Assim, a série dada é absolutamente convergente.

(2,0) **VI.** Seja g uma função definida e contínua em $\mathbb{R}$ e considere a função

$$\phi(x) = \int_0^x e^{3(x-t)} \left[1+(g(t))^2\right] dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Prove que se tem

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty.$$

Resolução

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\phi(x) = e^{3x} \int_0^x e^{-3t} \left[1+(g(t))^2\right] dt.$$

Dado que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left[1+(g(t))^2\right] \geq 1,$$

vem

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^{-3t}\left[1+(g(t))^2\right] \geq e^{-3t}$$

e portanto,

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^x e^{-3t}\left[1+(g(t))^2\right] dt \geq \int_0^x e^{-3t}\, dt = -\frac{1}{3}\left(e^{-3x}-1\right).$$

Então,

$$\forall x > 0 \qquad \phi(x) \geq -\frac{1}{3} e^{3x}\left(e^{-3x}-1\right) = \frac{1}{3}\left(e^{3x}-1\right)$$

e, dado que $\lim_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$, concluímos, como pretendíamos, que

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty.$$