TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I — 2014/15 — 1º semestre

1º Teste — LEIC-TP, LEGI, LERC, LEE — Versão B

8 de Novembro de 2014

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4,0) 1. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| > 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{e^x - 1} \leq 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = [-1/2, 0[$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\min C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Qualquer sucessão convergente de termos em C tem limite negativo.

ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

iii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(3,5) 2. Considere uma sucessão de termo geral b_n definida por

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_{n+1} = b_n e^{-1/b_n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $b_n > 0$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é decrescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) 3. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{4n+1}{3n-7}}$ b) $\lim \dfrac{ne^{-n} + 2n^4}{n^4+1}$ c) $\lim \dfrac{5^n - 10}{n! - 10}$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{1+x} - 1}, & \text{se } x < -1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto -1? Justifique.

d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f.

(2,0) 5. Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Recorda-se que F terá um *mínimo local* em 0 se:

Existir $\epsilon > 0$ tal que se $x \in V_\epsilon(0)$ então $F(x) \geq F(0)$.

Suponha que F tem um mínimo local em 0, que $\varphi(0) = 0$ e φ é contínua em 0. Mostre que $F \circ \varphi$ tem um mínimo local em 0.