Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 9 de Novembro de 2013

LEE, LEGI, LEIC-TP, LETI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-2)^2}{x^2+1} \le 1\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \le 5\right\}, \qquad C = (A \cap B) \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B = \left[\frac{3}{4}, \sqrt{5}\right].$$

Resolução:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2+1} \le 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-4x+4-x^2-1}{x^2+1} \le 0 \;\Leftrightarrow\; -4x \le -3 \;\Leftrightarrow\; x \ge \frac{3}{4},$$

pelo que $A = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$. E, como

$$x^2 \le 5 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5},$$

vem $B = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right]$. Logo

$$A \cap B = \left[\frac{3}{4}, \sqrt{5}\right]$$

b) Determine, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C.

Resolução:

$\sup C = \max C = \sqrt{5}$, $\inf C = \frac{3}{4}$, e não existe mínimo de C pois $\frac{3}{4} \notin C$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em A é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C, então (u_n) tem pelo menos um subimite.

(iii) Qualquer sucessão de termos em C é convergente.

Resolução:
(i) Proposição verdadeira; qualquer sucessão decrescente de termos em A será minorada (por A ser minorado) e portanto convergente, pelo Teorema das Sucessões Monótonas e Limitadas.
(ii) Proposição verdadeira; qualquer sucessão de termos em C é limitada e portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem pelo menos uma subsucessão convergente.
(iii) Proposição falsa; por exemplo, a sucessão $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \ldots$.

(4) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{3}\,, \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{(2n+3)(2n+2)} \quad , \quad \text{se } n \ge 1. \end{cases}$$

a) Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} \ .$$

Resolução:

Como $a_1 = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$, a condição é verdadeira para $n = 1$. Admitamos agora que o resultado é verdadeiro para algum $n \in \mathbb{N}_1$. Provemo-lo para $n+1$. Tem-se

$$a_{n+1} = \frac{4a_n}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{4^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{4^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} \ ,$$

pelo que $a_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Indique o valor de $\lim a_n$.

De alínea a), tem-se $\lim a_n = 0$.

(3) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{n\sqrt{n}}{n^2+3n+1} \qquad \text{b)} \lim \frac{(-1)^n n^2}{n^2+4} \qquad \text{c)} \lim \sqrt[n]{\frac{4^n}{(2n+1)!+1}}$$

Resolução:

a) $\displaystyle \lim \frac{n\sqrt{n}}{n^2+3n+1} = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0.$

b) O limite não existe, pois a sucessão tem dois sublimites distintos. De facto, sendo $u_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2+4}$, tem-se:

$$\lim u_{2n} = \lim \frac{(2n)^2}{(2n)^2+4} = 1 \quad \text{e} \quad \lim u_{2n-1} = -\lim \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2+4} = -1.$$

c) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{b_n}$, com $b_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!+1}$. Ora, como

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}}{(2n+3)!+1}\,\frac{(2n+1)!+1}{4^n} = 4\frac{1+\frac{1}{(2n+1)!}}{(2n+3)(2n+2)+\frac{1}{(2n+1)!}} \to 0,$$

tem-se $\lim \sqrt[n]{b_n} = 0$.

(7) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right), & \text{se } x < -1, \\ e^{-4x-x^2}, & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-4x-x^2} = 0$.

b) Decida, justificando, se existe $\lim_{x\to-1} f(x)$.

Resolução:

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1} \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ e $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1} e^{-4x-x^2} = e^3$.

Logo, não existe $\lim_{x\to-1} f(x)$ (em $\overline{\mathbb{R}}$).

c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.

Resolução:
Em cada um dos intervalos do domínio a função é a composta de funções diferenciáveis, e portanto diferenciável. Logo, o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. E

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{x(x^2-1)}, & \text{se } x < -1, \\ -2(2+x)e^{-4x-x^2}, & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

d) Mostre que a função é monótona em cada um dos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$, mas não é monótona em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Resolução:
Tem-se $f'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -1[$ e para $x \in]-1, +\infty[$, pelo que a função é decrescente nestes intervalos. E não é decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, pois, por exemplo, $-2 < 0$ mas $f(-2) = \log(1 - \frac{1}{4}) < 0$ e $f(0) = e^0 = 1 > 0$, isto é, $f(-2) < f(0)$.

e) Indique, justificando, o contradomínio de f.

Resolução: Dado que f é função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, usando o Teo. de Bolzano e os resultados anteriores, vem

$$f(]-\infty, -1[) =]-\infty, 0[\text{ e } f(]-1, +\infty[) =]0, e^3[. \text{ Então,}$$

$$f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) =]-\infty, 0[\cup]0, e^3[.$$

(1,5) **V.** Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ verificando

$$f\left(\frac{4n + (-1)^n}{4n+2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 \log n}{1 - n^2}\right), \qquad \text{para todo o } n \geq 2.$$

Calcule, justificando, o valor de $f(1)$.

Resolução:
Dado que f é função contínua no ponto 1, tem-se

$$\lim f\left(\frac{4n + (-1)^n}{4n+2}\right) = f\left(\lim \frac{4 + \frac{(-1)^n}{n}}{4 + \frac{2}{n}}\right) = f(1).$$

Por outro lado,

$$\lim \frac{n^2 \log n}{1 - n^2} = \lim \frac{\log n}{\frac{1}{n^2} - 1} = -\infty,$$

pelo que

$$\lim \operatorname{arctg}\left(\frac{n^2 \log n}{1 - n^2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Então, $f(1) = -\frac{\pi}{2}$.