TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 6 de Janeiro de 2020

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Calcule

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen}^2 x)}{1-\cos x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt}{\int_0^x t^2 e^{t^2}\, dt}$.

(5,0) **II.** Calcule

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x}\, dx$. b) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\log(1+e^{2x})\, dx$.

(3,0) **III.** Calcule a área da região limitada pelas linhas de equação $y = \log x$ e $y = \frac{x}{e}\log x$.

(5,0) **IV.** 1. Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes e se possível calcule a soma de uma delas.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n+1}+(-1)^n}{\pi^n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

2. Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^n}{2\pi^n+1}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(3,0) **V.** Seja

$$f(x) = \int_{x-\frac{1}{x}}^{x} te^{-1/t}\, dt.$$

a) Mostre que f está definida para $x \in \,]1,+\infty[$.

b) Mostre que o limite $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)$ existe e é um número real no intervalo $\left]0, \frac{1}{2e}\right[$.

c) Mostre que f é uma função limitada.