Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B)   10 de Novembro de 2018

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + |x-2|}{x^2+2} \leq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(x^2) \geq 0 \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \setminus B = [0, 1[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\inf B$, $\max(A \cap \mathbb{Q})$, $\inf(B \cap \mathbb{R}^+)$, $\min(A \cap B)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se (a_n) é uma qualquer sucessão de termos em A, a sucessão $(a_n \cos(1/n))$ converge para 0.

(ii) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(A)$ tem máximo.

(iii) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em B tem limite $-\infty$.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + 1 - \frac{1}{n+1}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $b_n \in [0, 2]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre, usando indução finita, que (b_n) é uma sucessão crescente.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{b) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{e^n + 1}}. \qquad \text{a) } \lim \frac{\operatorname{sen} n}{(-1)^n + 2n^3}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x-1}.$$

a) Decida se f é ou não prolongável por continuidade ao ponto 1.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f.

d) Determine os intervalos de monotonia e extremos (locais e absolutos) de f.

e) Determine $f(]1, +\infty[)$.

(2,0) **V.** Seja $f :]-1, 1[\to]-1, 1[$ uma função diferenciável com um *mínimo* em 0 e derivada crescente. Mostre que a função g definida por

$$g(x) = f(x) - \operatorname{arcsen}(f(x))$$

tem um *máximo* em 0.