TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 10 de Novembro de 2018

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x-1| + x^2}{x^2+1} \leq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(x^2) \geq 1 \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \setminus B = [0, \sqrt{e}[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\inf B$, $\text{máx}(A \cap \mathbb{Q})$, $\inf(B \cap \mathbb{R}^+)$, $\min(A \cap B)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe uma sucessão estritamente crescente de termos em B que é convergente.

(ii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em A, a sucessão $(a_n \operatorname{sen}(1/n))$ converge para 0.

(iii) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(A)$ tem mínimo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1/2, \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $a_n \in [0, 2]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre, usando indução finita, que (a_n) é uma sucessão crescente.

c) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{\operatorname{arctg} n}{(-1)^n n^2 + 2}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt[n]{\frac{3^n + 3}{n!}}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{x}.$$

a) Decida se f é ou não prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f.

d) Determine os intervalos de monotonia e extremos (locais e absolutos) de f.

e) Determine $f(]0, +\infty[)$.

(2,0) **V.** Seja $f :]-1, 1[\to]-1, 1[$ uma função diferenciável com um *mínimo* em 0 e derivada crescente. Mostre que a função g definida por

$$g(x) = f(x) - \operatorname{arcsen}(f(x))$$

tem um *máximo* em 0.