

Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame 17/07/2021
 LEE, LEGI, LEIC-T, LETI

1. Preencha o nome, número de aluno e curso abaixo.
2. Para garantir que todas as suas respostas são consideradas, em particular se respondeu às perguntas não sequencialmente ou se uma pergunta não está respondida em páginas consecutivas, numere as páginas do seu caderno de respostas e indique-as na linha e coluna respectivas da tabela abaixo.
3. Se pretender realizar o 1^o teste, resolva os grupos **I a V**.
4. Se pretender realizar o 2^o teste, resolva os grupos **VI a X**.
5. Se pretender realizar o exame, resolva os grupos **I a X**.
6. Para um teste ser considerado deve ser entregue até 1h 30m após o início da prova. Depois disso todas as provas são automaticamente consideradas exames.

Nome: _____

Número: _____ Curso: _____

Pergunta	Páginas	Classificação
Ia		
Ib		
Ici		
Icii		
Iciii		
IIa		
IIb		
IIc		
IIIa		
IIIb		
IIIc		
IVa		
IVbi		
IVbii		
V		
VIa		
VIb		
VIc		
VII		
VIII		
IXa		
IXb		
IXc		
Xa		
Xb		

Nota

As perguntas são classificadas de 0 a 10, sendo a cotação de cada pergunta só considerada no momento do cálculo da classificação final.

Classificação: _____

Número de ordem: _____

Rúbrica do docente: _____

Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão A) 17 de Julho de 2021

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de \mathbb{R} :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{e^x - 1}{e^x - 2} \right| < 1 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sin(1/x) = 0\}, \quad C = \left\{ \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a) Identifique o conjunto A e verifique que

$$A \subset]-\infty, 2[.$$

b) Determine, ou justifique que não existem em \mathbb{R} , $\inf A$, $\max A$, $\sup A$, $\max(A \cap B)$, $\inf(B \cap C)$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão de termos em C possui subsucessões convergentes.

(ii) Qualquer sucessão convergente de termos em B tem limite 0.

(iii) Se $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $g(A)$ tem supremo.

(4,0) **II.** Considere a sucessão (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = \frac{2x_n}{\pi} \arctg(e^{x_n}), \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Justifique que $0 < x_n \leq 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Justifique que (x_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(4,0) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim n! \sin\left(\frac{1}{n!}\right), \quad \text{b) } \lim \frac{\arctg(n!)}{\arccos(1/n)}, \quad \text{c) } \lim \left(\frac{\arctg n}{n!}\right)^{1/n}.$$

(4,0) **IV.** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Defina-se a função $f : [-1, +\infty[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \arccos(x), & \text{se } x \in [-1, 0[, \\ \frac{\alpha}{2x+1}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Determine α de maneira a f ser prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Designe por g o prolongamento por continuidade de f a 0.

i) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ se existir.

ii) Determine o contradomínio de g .

(3,0) **V.** Seja $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, $h(1) = 2$.

Mostre que o contradomínio da função Ψ definida por $\Psi(x) = h(x) - x$ é da forma $]-\infty, M]$ em que $M \geq 1$.

2º Teste

(4,5) **VI.** Calcule

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^4}^{x^2} \cos(t^2) dt}{x \operatorname{sen} x} \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx. \quad \text{c) } \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

(4,0) **VII.** Estude, quanto a crescimento, sentido da concavidade do gráfico, extremos locais e pontos de inflexão, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt - xe^{x^2}$.

(4,0) **VIII.** Calcule a área da região

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x \leq y \leq x\sqrt{1-x^2} \right\}.$$

(4,5) **IX.** Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n - n}{n2^n}. \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}. \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/n} e^{-1/t} dt.$$

(3,0) **X.** Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com $g \geq 0$ e verificando $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m g(x) dx = 1$.
Calcule

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \int_{-1}^1 f(\epsilon x) g(x/\epsilon) dx.$$

[Sugestão: Comece por considerar uma mudança de variável adequada.]