Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão B) 29 de Janeiro de 2018

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} \geq 2 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 3\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cap B = [-2, -1[\cup]2, 4].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup C$, $\min C$, $\inf C \setminus \mathbb{Q}$, $\max(C \cap \mathbb{R}^-)$, $\min(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se f é uma função contínua em C, f tem mínimo em C.

(ii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C, a sucessão $\left(\frac{2^n a_n}{n!}\right)$ é convergente.

(iii) O conjunto dos sublimites de uma sucessão de termos em C é não vazio.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (b_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ b_{n+1} = 1 + \dfrac{b_n}{3} \cos(1/n), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $b_n \in [1, 3/2[$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (b_n) é monótona crescente.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]^n$, **b)** $\lim \dfrac{(n+3)(2n-5)}{3+n(n+1)}$, **c)** $\lim \sqrt[n]{\dfrac{1+3^n}{n!}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} e^{-x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Decida se f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f.

d) Determine o contradomínio de f.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $\varphi(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$. Mostre que a equação $\varphi(x) = x^2$ tem, pelo menos, uma raíz.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$, **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^4} \frac{\cos t}{t+1}\,dt}{\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t+1}\,dt}$.

(4,0) **VII.** 1. Calcule

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\log^3 x}{x}\,dx$, **b)** $\displaystyle\int_0^1 (1+x)e^{-x}\,dx$,

(2,0) 2. Determine a função $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ que verifica todas as condições seguintes:

$$\begin{cases} \forall_{x\neq 0} \quad f'(x) = \dfrac{1}{x^3+x}, \\ f(-1)=1, \\ f(1)=0. \end{cases}$$

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano definida por

$$\left\{(x,y) : x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[, \operatorname{tg} x \le y \le \sqrt{2}\operatorname{sen} x\right\}.$$

(5,0) **IX.** Decida quais das seguintes séries são convergentes, quais são divergentes e, se possível, calcule a soma de uma delas:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\operatorname{sen} n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+1}{n^4\sqrt{n}+2}$. **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{\pi^n}$.

(2,0) **X.** Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Definindo

$$g(x) = \int_0^x h(t-x)\,dt,$$

justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e relacione a sua derivada com a função h.