Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão A) 28 de Janeiro de 2020

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2 - |x-2|} \geq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : e^{x^2-2} \leq e \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e verifique que

$$C = A \cap B =]0, 1].$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\inf B$, $\inf(C \setminus \mathbb{Q})$, $\max C$, $\min(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C estritamente crescente então $\lim a_n = 1$.

(ii) Se (a_n) é uma sucessão de termos em C então $\lim \log(\frac{a_n}{n}) = -\infty$.

(iii) Se $f : C \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então f tem máximo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{2} e^{x_n}\right), & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $x_n \in [0, \log 2]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (x_n) é monótona e decida se é crescente ou decrescente.

c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{2 + (-1)^n n^2 + 3n^3}{n^2(n+1)}$, **b)** $\lim \dfrac{\cos(e^n)}{1 - e^n}$, **c)** $\lim \sqrt[n]{\dfrac{3\pi^n - 1}{n + e^n}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & \text{se } x < 0, \\ \frac{e^{-x}}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Decida se h é ou não prolongável por continuidade ao ponto 0.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

c) Determine a derivada de h e intervalos de monotonia da função.

d) Determine o contradomínio de h.

(2,0) **V.** Seja $f :]1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xe^{-2x}$. Justifique que f é injectiva e, sendo g a função inversa de f, calcule $g'(e^{-2})$ e $g''(e^{-2})$.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x \operatorname{sen}(x-1)}{1-e^{x-1}}$, **b)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\int_x^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}$.

(5,0) **VII.** Calcule

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3+x^6}\, dx$, **b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log^2 x}{x(1+\log^2 x)}\, dx$,

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, xe^x \leq y \leq e^x\}.$$

(5,0) **IX.** 1. Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2}$. **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!+2}{(2n)!}$.

2. Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^n+1}$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(3,0) **X.** Seja $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{x-1}^{x^2} e^{t^2}\, dt.$$

a) Mostre que ϕ não é majorada.

b) Mostre que ϕ possui um ponto de mínimo local no intervalo $]0,1[$.