Cálculo Diferencial e Integral I

Repetições de Testes e Exame (Versão A) 29 de Janeiro de 2019

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **X**.

1º Teste

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x \log x}{x-2} \geq 0\right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = A \cup B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \cup \,]2, +\infty[.$$

b) Indique, ou justifique que não existem, $\sup A$, $\inf B$, $\min(C \cap \mathbb{Q})$, $\text{máx}(C \setminus]0, +\infty[)$, $\min(C \cap \mathbb{Z})$.

c) Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em C é convergente.

(ii) Toda a sucessão de termos em C tem um sublimite.

(iii) Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (x_n) definida por

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{n}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução finita para mostrar que os termos da sucessão verificam $x_n \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Use indução finita para mostrar que a sucessão (x_n) é decrescente.

c) Justifique que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{(-1)^n \operatorname{sen} n + \operatorname{arctg} n}{n}$, **b)** $\lim \left(\dfrac{2n^2 - 1}{3n^2 + 1}\right)^n$, **c)** $\lim \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{x+1}, & \text{se } x < -1, \\ x \operatorname{arctg}(x+1), & \text{se } x \geq -1. \end{cases}$$

a) Decida se f é ou não contínua no ponto -1.

b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Determine a derivada de f.

d) Mostre que f possui um mínimo absoluto que ocorre num ponto de $]-1, 0[$.

(2,0) **V.** Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$\varphi(n+1) = (-1)^n n + \varphi(n-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que $\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x)$ não existe.

2º Teste

(4,0) **VI.** Calcule os limites

a) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$, **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\int_1^{e^x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

(5,0) **VII.** Calcule

a) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$, **b)** $\int_1^e \frac{1+\log^2 x}{x}\, dx$,

(3,0) **VIII.** Calcule a área da região do plano limitada pelas linhas de equação $y = \sqrt{8}x$ e $y^2 = 4x$.

(5,0) **IX.** 1. Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes e se possível calcule a soma de uma delas.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n + 3^n}{\pi^n}$. **b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+1}{n^2(\sqrt{n}+2)}$.

2. Determine os valores de x para os quais a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^2(2+n!)} x^n$$

é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

(3,0) **X.** Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua verificando $h(x) \geq 1$ para todo o x. Define-se uma função g através de

$$g(x) = \int_{x^2}^{x \log x} \frac{h(t)}{t}\, dt,$$

a) Determine o domínio de g.

b) Mostre que o contradomínio de g é um intervalo ilimitado contido em $]-\infty, 0[$.