Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B)   4 de Janeiro de 2016

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{\log(1-x)}{\log(\operatorname{sen}(1-x))}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{2x}{\pi}\right)^{1/\cos x}.$$

(4,5) **II.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x+5}, \qquad \text{b) } \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}.$$

2. Calcule

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^x}\,dx.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região plana definida por

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0 \text{ e } \pi-2\operatorname{arctg} x\geq y\geq 2\operatorname{arctg} x\right\}.$$

(4,0) **IV.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x)=\int_2^x (2-x)\,f(t)\,dt.$$

a) Mostre que se f é positiva então $g(x)\leq 0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$.

b) Justifique que g é diferenciável e calcule g'.

c) Supondo que f é uma função ímpar e $f(-2)=1$, calcule $g(-2)$ e $g'(-2)$.

(4,0) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+5)\sqrt{n^2+1}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n^4+1}{n!}.$$

(2,0) **VI.** Seja $\phi\in C^2(\mathbb{R}^+)$ tal que $\phi'(1)=0, \phi''(1)=2$. Sendo $\varphi(x)=\phi(e^x)$, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}.$$