TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, Repetição dos Testes (Versão B) 25 de Janeiro de 2016

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,5) I. 1. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2+1}{x^2-4} > 2 \right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |e^x - 4| \leq 1\}.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(A \cap \mathbb{R}^+)$, $\max B$ e $\sup(A \cap \mathbb{N})$.

2. Considere o conjunto $C = [1,3] \cup \{\pi\}$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C, estritamente crescente, tem limite 3.

ii. Se (v_n) é uma sucessão de termos em C, a sucessão $\left(\frac{v_n}{\sqrt{n+1}}\right)$ é convergente.

iii. Toda a função definida e contínua em C tem mínimo.

(3,0) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in [2,3[$ para $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{5n^6+1}{n+n^2(1-n^4)}$, b) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{3n}{5n+(-1)^n}}$, c) $\lim \dfrac{\sqrt[4]{n}-\sqrt{n}}{1+\sqrt[4]{n}}$.

(6,0) IV. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\operatorname{arctg}^2 x}, & \text{se } x > 0, \\ x \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Decida se g é ou não prolongável por continuidade a 0.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

c) Determine a função derivada g'.

(2,0) V. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função para a qual existe existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \qquad |f(x) - f(y)| \leq \alpha|x-y|.$$

a) Mostre que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

b) Supondo que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, mostre que

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad |f'(x)| \leq \alpha.$$

2º Teste

(2,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arcsen} x}{1-\cos x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt}{x^2}.$$

(4,5) VII. 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}, \qquad \text{b) } \frac{3}{x^2+3}\,.$$

2. Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{(t+2)\sqrt{t+1}}\,dt.$$

(3,0) VIII. Calcule a área da região

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le e, 1-\log x\le y\le 1+(x-1)^2\right\}.$$

(4,0) IX. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n+3)}{\pi^{n+2}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{\sqrt[4]{n^6+2}}.$$

(4,0) X. Considere a função dada por

$$h(x) = \int_2^{\log x} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

a) Determine justificadamente o domínio de h.

b) Determine $h'(x)$.

(2,0) XI. Determine uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diferenciável e não identicamente nula, tal que

$$f^3(x) = \int_1^x \frac{e^t f^2(t)}{1+e^t}\,dt \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$