TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, Repetição dos Testes (Versão A) 25 de Janeiro de 2016

LEIC-T, LEGI, LETI, LEE

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(4,5) I. 1. Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x^2-1} \leq 1 \right\}, \qquad B = \{ x \in \mathbb{R} : |e^x - 3| > 2 \}.$$

a) Exprima A e B na forma de intervalos ou reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\inf B$, $\min(B \cap \mathbb{R}^+)$, $\max A$ e $\sup(A \cap \mathbb{Z})$.

2. Considere o conjunto $C = [-1, 2] \cup \{e\}$. Decida justificadamente se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i. Qualquer sucessão de termos em C, estritamente decrescente, tem limite -1.

ii. Toda a função definida e contínua em C tem máximo.

iii. Se (u_n) é uma sucessão de termos em C, a sucessão $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ é convergente.

(3,0) II. Considere uma sucessão de termo geral a_n definida por

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in [2, 3[$ para $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{n^2 - n(n^3+1)}{3n^4+1}, \qquad \text{b)} \lim \sqrt[n]{\frac{n + (-1)^n}{2n}}, \qquad \text{c)} \lim \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}.$$

(6,0) IV. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x > 0, \\ \frac{1}{1+\operatorname{arctg}^2 x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Decida se g é ou não prolongável por continuidade a 0.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

c) Determine a função derivada g'.

(2,0) V. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função para a qual existe existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \qquad |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$

a) Mostre que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

b) Supondo que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, mostre que

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \qquad |f'(x)| \leq \alpha.$$

2º Teste

(2,5) VI. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{arcsen} x}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1^-} \frac{\int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt}{(x-1)^2}.$$

(4,5) VII. 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{\cos(\log x)}{x}, \qquad \text{b) } \frac{2}{x^2+2}.$$

2. Calcule

$$\int_2^7 \frac{1}{(t+3)\sqrt{t+2}}\,dt.$$

(3,0) VIII. Calcule a área da região

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2, 1-(x-1)^2 \le y \le 1+\log x\right\}.$$

(4,0) IX. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n^2\sqrt{n+9}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{e^{n+1}}.$$

(4,0) X. Considere a função dada por

$$h(x) = \int_1^{x^3} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

a) Determine justificadamente o domínio de h.

b) Determine $h'(x)$.

(2,0) XI. Determine uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diferenciável e não identicamente nula, tal que

$$f^2(x) = \int_1^x \frac{t f(t)}{1+t^2}\,dt \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$