5 Cálculo Diferencial — Primitivação

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $2x^2 + 3x^3$,	b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$,	c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$,
d) $\sqrt[3]{1-x}$,	e) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$,	f) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$,
g) $\dfrac{x^3}{3+x^4}$	h) $\dfrac{e^x}{1+2e^x}$,	i) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$,
j) $\operatorname{sen}(2x)$,	k) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}$,	l) $\cos^2 x$,
m) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$,	n) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$,	o) $x\cos(x^2+2)$,
p) $e^x \operatorname{sen}(e^x)$,	q) $x^2\sqrt[3]{1+x^3}$,	r) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$,
s) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$,	t) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$,	u) $\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$,
v) $\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$,	w) $\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}$,	x) $\operatorname{tg}^2 x$,

2. (Exercício IV.22 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $(x^2+1)^3$, b) e^{x+3}, c) 2^{x-1}, d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$, e) $\dfrac{x}{1+x^2}$, f) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$,

g) $\operatorname{cotg} x$ h) $3^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x$, i) $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

j) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, k) $\dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$, l) $\cos x\cos 2x$,

m) $\operatorname{sen}^3 x\cos^4 x$, n) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^4 x$.

3. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x}+\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, b) $3\operatorname{sen} x+2x^2$, c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,

d) xe^{-x^2}, e) $\dfrac{3\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$, f) $x\sqrt{1+x^2}$,

g) $e^{2\operatorname{sen} x}\cos x$, h) $\dfrac{1}{1+e^x}$, i) $\operatorname{tg} x$,

j) $\dfrac{1}{2+x^2}$, k) $\operatorname{tg} x\sec^3 x$, l) $\cos^3 x\operatorname{sen}^3 x$,

m) $\dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, n) $\dfrac{x}{1+x^4}$, o) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$,

p) $\dfrac{1}{1+3x^2}$, q) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, r) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$,

s) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, t) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, u) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

v) $\dfrac{\cos(\log x)}{x}$, w) $\dfrac{1}{x\log x}$, x) $\sec^4 x$.

4. (Exercício IV.23 de [1]) Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

   a) $f'(x)=\frac{1}{4+9x^2}$, $x\in\mathbb{R}$; $f(0)=1$.
   b) $g'(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $g(0)=0, g(2)=3$.
   c) $h'(x)=\sec^2 x$, para x no dominio de $\sec x$; $h(k\pi)=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. (Exercício 5.5 de [2]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x\operatorname{sen}(x^2),\qquad \frac{e^x}{2+e^x},\qquad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$

determine se possível:

a) uma primitiva que se anule no ponto $x = 0$;

b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x \to +\infty$.

6. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

$$\text{a) } \frac{1}{1-x}, \qquad \text{b) } \frac{1}{(x-3)^3}, \qquad \text{c) } \frac{x+1}{x^2+1},$$
$$\text{d) } \frac{x}{1+(x-1)^2}, \qquad \text{e) } \frac{2x+1}{x^2+4}, \qquad \text{f) } \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

7. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2+x}, \qquad \text{b) } \frac{x+1}{x(x-1)^2}, \qquad \text{c) } \frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)},$$
$$\text{d) } \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}, \qquad \text{e) } \frac{x^5}{x^2-1}, \qquad \text{f) } \frac{x}{(x+1)(x+2)^2},$$
$$\text{g) } \frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}, \qquad \text{h) } \frac{x^4}{x^4-1}, \qquad \text{i) } \frac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}.$$

8. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

9. (Exercício 5.16 de [2]) Determine

a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva G, da função

$$g(x) = \frac{x+3}{x^4-x^2}$$

definida no intervalo $]1, +\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 3$.

10. (Exercício 5.3 de [2]) Determine uma função F definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad F(2) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 10.$$

11. (Exercício 5.12 de [2]) Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\forall_{x>-1}\ \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

12. (Exercício IV.25 de [1]) Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) xe^x, b) $x \operatorname{arctg} x$, c) $\operatorname{arcsen} x$,
d) $x \operatorname{sen} x$, e) $x^3 e^{x^2}$, f) $\log^3 x$,
g) $x^n \log x, \ n \in \mathbb{N}$, h) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

13. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x + x)$, b) $e^x \operatorname{sen} x$, c) $x^3 e^{-x^2}$,
d) $\operatorname{arctg} x$, e) $\sqrt{x} \log x$ f) $x(1+x^2) \operatorname{arctg} x$,
g) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$, h) $\log\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$, i) $x^2 \log^2 x$,
j) $\log^2 x$, k) $\dfrac{1}{x^3} \cos \dfrac{1}{x}$, l) $\cos 2x \log(\operatorname{tg} x)$,
m) $3x\sqrt{1-x^2} \operatorname{arcsen} x$, n) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$, o) $\operatorname{ch} x \cos x$,
p) $3^x \cos x$, q) $\cos(\log x)$, r) $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

14. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:
$$P\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right)\right).$$

b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,
$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1-k)}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right)P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right).$$

(Sugestão: $\frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$).

c) Utilize a alinea anterior para calcular
$$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right), \qquad P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right).$$

15. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições

apropriadas:

a) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$, e) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, f) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

g) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, h) $\dfrac{\log x}{x(\log x-1)^2}$, i) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$,

16. (Exercícios 5.21, 5.23, 5.24, 5.26, 5.28, 5.31 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, c) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$,

d) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$, e) $\dfrac{2\log x-1}{x\log x(\log x-1)^2}$, f) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.

17. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x,\ t=\operatorname{sen} x$, b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$,

c) $\sqrt{1-x^2},\ x=\operatorname{sen} t$ d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4},\ x=\cos t$, f) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}},\ t=\sqrt{1-e^x}$,

g) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, h) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ x=\operatorname{sen}^2 t$,

i) $\dfrac{3\operatorname{sen} x+3}{\cos x+\operatorname{sen} 2x},\ t=\operatorname{sen} x$, j) $\sec^3 x,\ t=\operatorname{sen} x$,

k) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x=\operatorname{tg} t$, l) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x},\ t=\operatorname{sen} x$,

m) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ t=\sqrt{1-x^2}$, n) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}},\ t=\sqrt{1+e^x}$,

o) $\sqrt{4+x^2},\ x=2\operatorname{tg} t$, p) $\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$.

18. (Exercício 5.21 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $g'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x > 16$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

19. (Exercício 5.24 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f''(x) = (1 + \operatorname{sen} x)\cos x$, $f'(0) = 0$, $f(0) = 3$.

b) $g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

20. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $|x|$,

b) $x \arcsin \dfrac{1}{x}$,

c) $\operatorname{sen}(\log x + 1)$,

d) $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$,

e) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$,

f) $\dfrac{1+\log^2 x}{x(1+\log x)}$,

g) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$,

h) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$,

i) $\cos^3 x$,

j) $\cos^4 x$,

k) $x \log \dfrac{1-x}{1+x}$,

l) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,

m) $\dfrac{\log(\log x)}{x \log x}$,

n) $\log(x+\sqrt{x})$,

o) $\dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$,

p) $\cos x \log(1+\operatorname{sen}^2 x)$,

q) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$,

r) $x \operatorname{arctg}^2 x$,

s) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$,

t) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$,

u) $\dfrac{x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$,

v) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+3\cos^2 x}$,

w) $\log(\cos x) \operatorname{tg} x$,

x) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}$,

y) $(\arcsin x)^2$,

z) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}$.

21. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Outros exercícios: 5.2, 5.4, 5.7, 5.14, 5.17, 5.20, 5.22, 5.25 , 5.32 de [2].

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.