4 Cálculo Diferencial

1. (Exercício IV.1 de [1]) Calcule as derivadas das funções:

   a) $\operatorname{tg} x - x$,
   b) $\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,
   c) $e^{\operatorname{arctg} x}$,
   d) $e^{\log^2 x}$,
   e) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,
   f) $x^2(1 + \log x)$,
   g) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$
   h) $(\log x)^x$,
   i) $x^{\operatorname{sen} 2x}$.

2. Derive:

   a) $\operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{arctg} x)^4$,
   b) $(\operatorname{sen} x)^x$,
   c) $\log \log x$,
   d) $\frac{\operatorname{sen} \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$,
   e) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$.

3. (Exercício IV.3 de [1]) Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$,
   b) $e^{-|x|}$,
   c) $\log |x|$,
   d) $e^{x-|x|}$.

4. (Exercício 4.9 de [2]) Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

   a) $\log(x \operatorname{sh} x)$ (ver Ex. 14),

   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$,

   c) $\frac{e^x}{1+x}$.

5. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

6. (Exercício 4.2 de [2]) Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcule f' para $x \neq 0$ e mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

   b) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

8. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

10. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

11. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

12. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

a) Justifique que f é diferenciável em $]-1,1[$ e calcule $f'(0)$.

b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

13. (Exame de 14-6-06) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1,1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por

$$g(x) = \arccos(f(x)).$$

(a) Justifique que g é injectiva e diferenciável e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não tem máximo nem mínimo. Será g^{-1} limitada?

14. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):

i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

ii) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

iii) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

iv) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

v) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

b) Verifique que a função sh é ímpar, e a função ch é par.

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x$.

d) Estude sh e ch quanto à continuidade e diferenciabilidade. Calcule $(\operatorname{sh} x)'$ e $(\operatorname{ch} x)'$.

e) Estude sh e ch quanto a intervalos de monotonia e extremos e esboce os respectivos gráficos.

f) As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por argsh e argch, isto é, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{argsh} x$, $y \in \mathbb{R}$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{argch} x$, $y \in \mathbb{R}^+$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{argch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Calcule $(\operatorname{argsh} x)'$ e $(\operatorname{argch} x)'$.

Outros exercícios: 4.5, 4.6, 4.10, 4.11, 4.12, 4.17 de [2].

15. (Exercício 4.27 de [2]) Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

   a) Para qualquer $n \geq 2$, a restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tem necessariamente um máximo.
   b) A função f é necessariamente limitada.
   c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

16. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

17. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.

18. (Exercício 4.32 de [2]) Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

19. (Exercício 4.36 de [2]) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$. (**Sugestão**: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

20. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

21. (Exercício IV.7 de [1]) Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:

   a) $\frac{x}{x^2+1}$,
   b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
   c) $|x^2 - 5x + 6|$,
   d) $x \log x$,
   e) e^{-x^2},
   f) $\frac{e^x}{x}$,
   g) xe^{-x},
   h) $\operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1 + x^2}$.

22. (Exame 23-7-2000) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

23. (Exame 15-1-2003) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$.

b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x), \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de g.

24. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

25. (Exame 9-1-06) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

26. (Exame 23-1-06) Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{tg}(g(x)) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

27. (Exercício 4.48 de [2]) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero $V_\epsilon(0)$, diferenciável em $V_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo $x \in V_\epsilon(0) \setminus \{0\}$.

    a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é máximo ou mínimo. No caso de f ser diferenciável em 0 qual será o valor de $f'(0)$?

    b) Mostre (por meio de um exemplo) que sem a hipótese da continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

28. (Exercício IV.12 de [1]) Calcule os limites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,

    b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,

    c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,

    d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

    e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

    f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$,

    g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

29. (Exercício 4.59 de [2]) Determine os limites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$,

    b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

30. (Exercício 4.61 de [2]) Determine os limites:

    a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

    b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$.

31. (Exercício 4.63 de [2]) Calcule os limites

    a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

    b) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$.

32. (Exercício 4.66 de [2]) Calcule os limites

    a) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

    b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

33. (Exercício 4.78 de [2]) Calcule $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}$ (**Sugestão**: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.).

34. a) Determine a fórmula de MacLaurin e a fórmula de Taylor relativa ao ponto 1, ambas de ordem 2 com resto de Lagrange, das funções seguintes: e^{2x}, $\log(1+x)$, $\cos(\pi x)$.

    b) Para a fórmula de MacLaurin, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de MacLaurin obtido no intervalo $]0,1[$.

35. Determine $e^{0,1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

36. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

37. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x-1)^2$, determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de g.

38. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, recorrendo à fórmula de MacLaurin, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

    então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

39. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 3 vezes diferenciável. Use a fórmula de Taylor para mostrar que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, se tem

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

40. (Exercício 4.90 de [2]) Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g definida por $g(x) = xf(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

    (**Sugestão**: Escreva a fórmula de MacLaurin de 1ª ordem de g e use-a para determinar o sinal de $f(x) - f(0)$).

41. Determine os extremos da função $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função.

42. (Exercício 4.109 de [2]) Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

43. (Exercício 4.126 de [2]) Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$ em $[0, 2\pi]$ (pode admitir que não existem pontos de inflexão).

44. (Exercício 4.129 de [2]) Faça o estudo da função $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x-1}\right)$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

Outros exercícios: 4.23, 4.24, 4.27, 4.31, 4.44, 4.45, 4.56, 4.58, 4.69, 4.74, 4.77, 4.82, 4.84, 4.88, 4.104, 4.105, 4.110 de [2].

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.